QUALE ALGEBRA?

Giuliano Spirito

1.1. Semantica *versus* sintassi

- *… tutto intento nei suoi calcoli smarrì il ben della ragione. Comunissima debolezza dei più grandi matematici! I quali, lavorando a tutt'uomo nella dimostrazione, vi logorano le migliori energie e restano senza un filo di forza per trarne il corollario di cui solo possono servirsi.*

Laurence Sterne – *"Tristram Shandy"*

L'affannarsi nella tecnica dimostrativa "dimenticando" il senso del percorso evoca un'attenzione esasperata al calcolo che espone a un possibile limite di autoreferenzialità; ovvero, ci segnala la circostanza che, a volte, nel fare matematica,
→ i segni si allontanano troppo dai significati, la sintassi rischia di oscurare la semantica ad essa sottesa.

→ Autoreferenzialità, distanza tra segni e significati, sintassi senza semantica, sono caratteristiche fortemente presenti nella pratica della didattica della matematica. Probabilmente esse portano buona parte della responsabilità dell'avversione profonda e spesso irreparabile che la matematica suscita in molti (sin dai tempi della scuola e non senza qualche buona ragione!).

Il rapporto tra segni e significati sarà uno dei fili conduttori del mio intervento

1.2. Viva la semantica

→ Se la domanda fatale ("a che serve la matematica?") non può che avere risposte generali e in qualche modo vaghe ("serve perché c'è matematica dentro la fisica, la chimica, ecc"; "serve perché la matematica si nasconde in ogni tecnologia che noi utilizziamo"; "serve per imparare a ragionare meglio" …)

- le domande "a che serve scomporre in fattori primi?", "a che servono i prodotti notevoli?", cioè le domande "interne" al percorso che sviluppiamo, esigono risposte precise e convincenti (il che costringe, prima di tutto noi insegnanti, a un supplemento di riflessione).

Insomma, in slogan:

- Calcolo sì, ma calcolo "ragionato" (in cui si esercita una sorta di **meta-riflessione**, ovvero ci si sofferma a guardare ciò che si fa, prima, mentre e dopo averlo fatto)

- Sistematizzazione e formalizzazione sì, ma solo come punto di arrivo e non come punto di partenza di un percorso (si sistematizza e si formalizza solo se e quando è necessario, cosicché gli alunni possano apprezzare senso e utilità della sistematizzazione e della formalizzazione)

- E più in generale: **viva una didattica "semanticamente forte"**, che dia il senso di ciò che si sta facendo

1.3. *De minimis non curat praetor* (ma l'insegnante sì)

A proposito di una didattica "semanticamente forte", che dia il senso di ciò che si va facendo, vediamo un esempio di situazione in cui il nodo didattico e concettuale resta coperto, mentre varrebbe forse la pena di esplicitarlo, prima a noi stessi e poi ad alunne e alunni.

Il punto di partenza potrebbe essere la considerazione di queste due uguaglianze:

$3 \times 5 = 15$ e $15 = 3 \times 5$

Esse dicono la stessa cosa?

La mia risposta è: sì e no.

Intanto: la prima viene vissuta come "naturale" (c'è a sinistra un'operazione e a destra il risultato), per cui possiamo pensarla come $3 \times 5 \rightarrow 15$; la seconda appare invece agli alunni del tutto "innaturale".

Ciò discende dal fatto che l'uguaglianza viene letta dagli alunni (ma a volte anche da noi) come la richiesta di effettuare un certo procedimento. Ai loro occhi, va bene $3 \times 5 = 15$, va molto meno bene $15 = 3 \times 5$.

Per i nostri alunni, dunque, la risposta è no, senza se e senza ma…

Il nostro sguardo "esperto", invece, percepisce anche un secondo aspetto dell'uguaglianza: l'uguaglianza è una relazione simmetrica (addirittura di equivalenza) e dunque non ha un "verso di percorrenza" privilegiato.

Per gli "esperti" la risposta è sostanzialmente sì.

Della diversità delle due risposte dobbiamo avere consapevolezza e tener conto nella nostra didattica.

1.4. Procedura *versus* relazione

La riflessione sull'uguaglianza ci suggerisce un indizio importante: **gli alunni tendono a privilegiare una "lettura" in termini di procedura rispetto a una "lettura" in termini di relazione**. E questo non solo a proposito di uguaglianze.

→ Un'ulteriore prova di questa attitudine "procedurale" dei nostri allievi è fornita dal teorema di Pitagora.

Esso viene "ritenuto" a distanza di tempo (quando va bene) come una procedura che consente di trovare un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due:

- ip = radice quadrata della somma dei quadrati dei cateti
  (a parole: per trovare l'ipotenusa devo calcolare..)
- ct = radice quadrata della differenza tra il quadrato dell'ipotenusa e il quadrato dell'altro cateto
  (a parole: per trovare un cateto devo calcolare…)

Quel che è certo è che resta in ombra il fatto che Pitagora afferma il sussistere di una relazione tra i tre protagonisti (per non parlare dell'aspetto geometrico, destinato a scolorire rapidamente nella mente dei nostri alunni).

Il rapporto tra procedura e relazione sarà il secondo dei fili conduttori del mio intervento

1.5. Formule inverse

Dall'attitudine procedurale discende, più in generale, la difficoltà che gli alunni hanno rispetto alle "formule inverse" (d'altra parte il nome stesso di "formule inverse" contribuisce a rafforzare il pregiudizio "procedurale"):

se "leggo" la "formula" $A = b \times a$

- come una relazione tra le grandezze area, base e altezza, capisco che in essa sono contenute implicitamente tre procedure (quella per trovare l'area conoscendo base e altezza, quella per trovare la base conoscendo area e altezza, quella per trovare l'altezza conoscendo area e base)
- altrimenti, se la formula è l'indicazione di una procedura per trovare l'area, note base e altezza, le formule inverse sono altre due procedure in qualche modo autonome tra loro e dalla formula iniziale (o, nel caso migliore, ricavabili l'una dall'altra in virtù di manipolazioni formali)

Si potrebbero fare molti altri esempi; ci limitiamo a un esempio "classico" che si ritrova nel "vissuto" di ciascuno di noi:

l'equazione $5 = x + 3$ viene risolta, con burocratica disciplina, attraverso la seguente catena di passaggi:

$$5 = x + 3 \rightarrow -x = 3 - 5 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$$

1.6. Preso atto…

Dunque, il primo punto è: prendiamo atto che… (è una consapevolezza che è fondamentale che l'insegnante acquisisca)

Ma il secondo punto è il conseguente nodo didattico:

quanto dobbiamo "forzare" perché gli alunni sviluppino (anche) l'attitudine a cogliere e utilizzare l'aspetto relazionale?

Forse non c'è una risposta semplice e definitiva alla questione; quel che è certo è che:

- la sensibilità relazionale non si ottiene gratis (come del resto niente nei percorsi di apprendimento); richiede tempo, attività "dedicate"

- la sensibilità relazionale non va semplicemente invocata (come del resto niente nei percorsi di apprendimento); occorre "farla vivere": ovvero, non è sufficiente comunicare agli allievi, *una tantum*, un'esigenza, seppure sottolineandone l'importanza; occorre invece che gli alunni si confrontino con essa in prima persona, attraverso esperienze sia concrete che mentali, conquistando quel tipo di "familiarità" che deriva da un'esposizione ripetuta ad essa.

1.7. Qualcosa che possiamo fare (e che non fa certamente male)

- Non perdere l’occasione per segnalare, sottolineare, enfatizzare ogni volta che sia possibile l’aspetto relazionale (a proposito di frazioni equivalenti, di monomi simili, nelle situazioni – “lettura” di un’uguaglianza, teorema di Pitagora, formule “inverse” – di cui abbiamo parlato, ecc.)

- Giocare con le relazioni e con le loro proprietà, usando esempi matematici e non (tra rette del piano o dello spazio: essere parallele, essere perpendicolari; tra figure del piano: avere perimetro maggiore, essere equivalenti; tra persone: essere coetanei, essere amici)

- Chiarire la differenza tra predicati unari (proprietà che riguardano i singoli “oggetti”; nei poligoni: avere perimetro di 10 m; tra le persone: essere nati a Firenze) e predicati binari (appunto le relazioni, che riguardano coppie di “oggetti”; nei naturali: essere minore; tra i poligoni: avere la stessa area)

- Descrivere relazioni e leggere le loro proprietà attraverso tabelle e grafi

Non è un lavoro inutile: ci frutterà in varie situazioni (quelle già viste e molte altre)!

1.8. I problemi

Le “Indicazioni nazionali” per la scuola primaria e secondaria di primo grado, coerentemente con le posizioni più avanzate nel dibattito sulla didattica della matematica, pone i problemi al centro dell’attività di insegnamento-apprendimento della matematica:

“Caratteristica della pratica matematica è **la risoluzione di problemi**, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.
Gradualmente, stimolato dalla guida dell’insegnante e dalla discussione con i pari, l’alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s’intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive.
Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un’attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L’alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni...) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema.
Un’attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti.”

Il ruolo dei problemi sarà il terzo filo conduttore del mio intervento

1.9. I problemi sono… problematici!

E’ un fatto, però, che alunne e alunni incontrano grandi difficoltà davanti ai problemi. Ma quali sono e da dove provengono tali difficoltà?

→ Alcune difficoltà sono certamente legate alla “comprensione del testo”. Tanto è vero che variazioni anche piccole nel testo possono produrre performances molto diverse.

(Rosetta Zan ha efficacemente intitolato il suo intervento al XXXIII convegno UMI-CIIM del 2016: “Il testo di un problema: *quello* è il problema!”).

→ Un’altra difficoltà deriva dal fatto che, sempre citando l’intervento della Zan:

“I problemi che si definiscono ‘realistici’ spesso hanno solo un contesto realistico, ma la domanda è artificiosa, così come il modo di dare le informazioni”

Si potrebbero citare gli improbabili problemi degli esami di maturità degli ultimi anni, con scarpe con il tacco che prevedono improbabili scatole sagomate anziché, banalmente, a forma di parallelepipedo…

Ma forse è meglio dare semplicemente la parola a Massimo Troisi… (dal film “Scusate il ritardo”)

"Problema: un contadino si reca al mercato per vendere tre sacchi di farina da chilogrammi settantadue e sei dozzine di uova. Durante l'operazione di scarico, uno dei sacchi cadendo sulle uova ne rompe la metà. Se la farina costa lire quindici al chilogrammo, e le uova lire cinque l'una, e di tutta la merce ne è stata venduta la metà, quanti soldi ha portato a casa il contadino, tenendo conto che dalla tasca bucata ha perduto lire trentacinque?”

dal film “Scusate il ritardo” di Massimo Troisi

2.1. Il significato classico di algebra

E’ giunto il momento di cominciare a parlare di **algebra** in senso stretto e di declinare in questo contesto le parole chiave precedentemente individuate.

“L’algebra è ‘il ramo della matematica che studia le uguaglianze, e in particolare le uguaglianze che contengono delle grandezze incognite, uguaglianze che possono essere verificate o no a seconda dei valori che si danno alle grandezze incognite. L’algebra è cioè la scienza delle uguaglianze condizionate, o equazioni’”

(Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*)

Se di un’uguaglianza in cui sono coinvolti solo numeri si può predicare solo la sua verità o falsità

- 5 + 2 = 18 -11 vera
- 5 – 2 = 3 x 2 falsa

per un’uguaglianza in cui compaiono lettere i casi possibili diventano tre

- x + y = y + x vera
- x + 1 = x falsa
- x + 2 = 5 “dipende”

quest’ultimo caso è quello che ci interessa di più

- perché contiene implicita una domanda-richiesta (per quale valore di x l’uguaglianza è vera?)
- perché è la traduzione in “matematichese” di molti problemi “ben posti” (non impossibili né indeterminati) quando li “formalizziamo”

2.2. (Specialmente di questi tempi) vale la pena di ricordare che…

Il termine algebra viene da *al-giabr*, parola araba il cui significato è *la riparazione, il riempimento*.

La troviamo utilizzata in un trattato dell'anno 825, finalizzato a risolvere problemi di ripartizione di eredità, dal matematico arabo al-Khuwarizmi (dal suo nome deriva il termine *algoritmo*), per designare l'operazione di addizionare lo stesso numero a entrambi i membri di un'uguaglianza.

Compare per la prima volta in Occidente nel *Liber abaci* (1202) di Leonardo Pisano, più noto come Leonardo Fibonacci.

Puro scrupolo filologico? No, piuttosto:

- Ci ricorda il debito che la matematica europea ha verso gli studiosi arabi
- Ci serve per sottolineare che l'algebra nasce storicamente dall'esigenza di risolvere problemi
- Ci aiuta a riflettere sulle scelte (in termini di gerarchie e di percorsi) che ci troviamo a operare nell'insegnamento dell'algebra.

2.3. Tante lettere diverse

Un punto di partenza dei nostri ragionamenti sull'algebra potrebbe essere il seguente: gli alunni, prima ancora di cominciare il capitolo dell'algebra in senso stretto, hanno già usato le lettere in contesti diversi e con significati diversi:

→ quando enunciamo la proprietà commutativa dell'addizione nella forma $a+b=b+a$ le lettere stanno a indicare due elementi qualsiasi dell'insieme ambiente (è sottinteso un quantificatore universale)

→ quando diciamo che un segmento è lungo a, la lettera sta a indicare una quantità precisa, che però non è nota e che non possiamo né vogliamo determinare

→ quando scriviamo $x+2=5$, la lettera sta a indicare un particolare numero che ci viene chiesto di determinare (è sottinteso: trova quel numero che…)

e così via.

Esplicitare i diversi significati delle lettere di volta in volta messe in campo e soffermarsi su di essi in modo non episodico, vuol dire andare nella direzione di sollecitare elementi di consapevolezza (li abbiamo chiamati spunti di meta-riflessione) che, a loro volta, danno profondità e solidità all'agire degli alunni.

2.4. Lettere (prima del calcolo letterale e delle equazioni)

- Non tutti i problemi significativi, in cui pure si utilizzano lettere per generalizzare, richiedono competenze nel calcolo letterale né si prestano a una traduzione in equazioni (laddove le lettere giocano il ruolo di incognite).

- Un importante momento di incontro con le lettere, che può ben precedere il lavoro sulle equazioni e la codifica del calcolo letterale, si ha quando vogliamo trovare una legge.

→ *Oggi ho una figurina. Ma ogni giorno voglio raddoppiare il numero delle mie figurine. Tra 3 giorni quante figurine avrò? Dopo un numero* n *di giorni quante figurine avrò?*

→ *Oggi ho 5 amici. Ma ogni giorno ne avrò 2 in più. Tra 4 giorni quanti amici avrò? Dopo un numero* n *di giorni quanti amici avrò?*

→ *Penso: mangio metà della torta che è in forno e lascio a mio fratello l'altra metà; dopo 1 minuto penso: ma no, ne mangerò 2/3; dopo un altro minuto penso: meglio mangiarne 3/4; e così via. Costruisci una tabella minuti trascorsi / frazione di torta che penso di mangiare e cerca di indovinare dopo 10 minuti quale sarà la frazione della torta che avrò progettato di mangiare. E dopo* n *minuti?*

Complichiamo un po’ il gioco:

Quanti sottoinsiemi possiede un insieme rispettivamente di 1, 2, 3, 4 elementi? Costruisci la tabella numero di elementi dell’insieme / numero dei sottoinsiemi e prova a indovinare quanti s.i. si ottengono se gli elementi sono 10. E se sono n*?*

- La prima domanda obbliga all’esame paziente di una casistica (i sottoinsiemi che vengono “visti” con più difficoltà sono quelli impropri).
- La seconda richiesta-domanda invita gli alunni a mettere in campo la tabella come strumento prezioso per intuire la legge sottostante a una corrispondenza.
- La terza domanda rappresenta il “compimento” del percorso: la formula, in cui compare la lettera *n*, rappresenta l’avvenuta “presa di possesso” della situazione problematica.
- Ancora un paio di osservazioni:

- Si può chiedere di calcolare, a partire dalla formula trovata, quanti s.i. ha l’insieme degli alunni della classe; per arrivare alla risposta che se, ad esempio, alunne e alunni sono 20, i sottoinsiemi sono 2^{20}, cioè circa un milione!
- Qualche volta, dunque, persino il calcolo è fonte di sorprese, suscita qualche “brivido” (non dimentichiamo che i $2^{64} – 1$ chicchi di riso della storiella del vecchio saggio non sono ottenibili neanche con l’intera produzione risicola della Cina!).

2.5. In quale ordine?

“*Problemi, equazioni, calcoli*: quest’ordine è approssimativamente quello che si è verificato nella storia, ma viene invertito nell’insegnamento”

(S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare*)

Questa inversione - quasi unanimemente adottata nei testi e nella prassi scolastica - è davvero convincente?

- Non è detto che la sequenza che si è realizzata nella storia del pensiero matematico sia anche quella didatticamente più efficace.
- Spesso è così: i “mondi numerici” che alunne e alunni “abitano” si succedono così come si sono succeduti nella storia dell’umanità (dai naturali per “espansioni” successive); la geometria euclidea, che della geometria “ingenua” è la sistemazione e il coronamento, viene presentata nella scuola solo dopo la geometria intuitiva; e così via...
- Ma altre volte no: quando si afferma un punto di vista nuovo e diverso, che, “rileggendo” e riconsiderando le acquisizioni precedenti, risulta più penetrante, più semplice, più compatto (un esempio: la geometria delle trasformazioni; e poi, come vedremo nel seguito, l’algebra moderna), è ragionevole ”giocarselo” nella didattica, al di là della sequenza storica.

2.6. I prima, i dopo, i perché

Dunque, la prassi didattica, in ambito algebrico, prevede la sequenza

calcolo letterale → equazioni → problemi

Ma:

→ in questo caso il ribaltamento dell'ordine "storico" non è figlio dell'assunzione di un nuovo e diverso punto di vista; discende, piuttosto, da un'esigenza, per così dire, d'ordine: costruire prima gli strumenti che poi si utilizzeranno

(il calcolo letterale per, in seguito, risolvere equazioni; e poi le tecniche risolutive delle equazioni per poter, in futuro, risolvere problemi).

Obbedire a questa esigenza d'ordine avviene:

- a costo di "sospendere il senso" dei vari passaggi (**capirai dopo** perché stiamo facendo ciò)
- a costo di "appesantire" il percorso con la (precoce?) codifica delle regole del calcolo letterale, da una parte oscurando il nodo più problematico, relativo alla "messa in equazione" di un problema, dall'altra rischiando di lasciar cadere preziose occasioni didattiche legate a un approccio "ragionato" al calcolo.

Ci chiediamo allora (domanda retorica):

Nella didattica (della matematica e non solo) non è forse sempre preferibile un percorso in cui ogni passaggio sia motivato da una precisa e "leggibile" esigenza (capirai prima e mentre)?

(nella fattispecie: l'obiettivo è risolvere problemi; mi accorgo, sul campo, che per risolvere problemi è cosa buona descriverli in termini di equazioni; per risolvere equazioni, mi imbatto nella necessità di acquisire dimestichezza con il calcolo letterale).

2.7. La “messa in equazione”

Se, in generale, come abbiamo detto, “i problemi pongono dei problemi”, qui vogliamo soffermarci sulle specifiche difficoltà che comporta la “messa in equazione”.

Il nodo è nel passaggio dalla strategia “al modo della scuola elementare” a quella che si fonda sulle equazioni: è forse l’esempio più significativo dei due approcci diversi (“algoritmico-procedurale” e “relazionale”) di cui abbiamo parlato in precedenza.

Infatti, “mettere in equazione” significa spostare l’attenzione

- dalla ricerca della concatenazione di operazioni (algoritmo) necessaria per risolvere il problema
- alla esplicitazione delle relazioni che intercorrono tra le quantità coinvolte nel problema

Ritengo che sia opportuno **rendere esplicito** questo passaggio e anche **motivarlo**:

- La messa in equazione permette di scoprire lo scheletro matematico sottostante al problema (cosicché, ad esempio, problemi che parlano di cose diverse possano rivelarsi essere lo stesso problema)
- La messa in equazione, proprio perché richiede solo la “lettura” delle relazioni, consente di “sciogliere” problemi altrimenti troppo complessi

2.8. Prima l'attenzione alla strategia, poi il calcolo

Problema: *due fratelli hanno in tutto 13 anni e il maggiore ha 5 anni più del minore; trova l'età dei due fratelli*.

La strategia "al modo della scuola elementare", legata alla ricerca della concatenazione di operazioni da compiere, ci porterà a dire:

- tolgo 5 dal totale, quindi calcolo 13 - 5 = 8; poi divido per 2 quanto ottenuto, quindi calcolo 8 : 2 = 4 e questa sarà l'età del minore; aggiungo all'età del minore 5, quindi calcolo 4 + 5 = 9 e questa sarà l'età del maggiore.

La strategia attraverso le equazioni consisterà nel registrare le relazioni tra i "protagonisti" del problema (età del minore, età del maggiore, chiamando x uno dei due e "battezzando" conseguentemente l'altro):

- età minore = x   età maggiore = età minore + 5 → età maggiore = x + 5
  età minore + età maggiore = 13 → **x + x + 5 = 13**

I passaggi risolutivi dell'equazione non richiedono codificate abilità di calcolo letterale:

x + x + 5 = 13 → 2x + 5 = 13 (una quantità, addizionata con sé stessa, è due volte la quantità iniziale)

2x + 5 = 13 → 2x = 13 – 5 (se una quantità sconosciuta, 2x, aumentata di 5, dà 13, la quantità sconosciuta vale 13 - 5, cioè 8)

2x = 13 – 5 → 2x = 8

2x = 8 → x = 4 (se il doppio di una quantità sconosciuta è 8, la quantità sconosciuta è 4)

→ età del minore = 4 e età del maggiore = 4 + 5 = 9

2.9. Prima il "calcolo ragionato", poi la codifica delle regole

Faremo notare ai nostri alunni che la soluzione del problema "via equazione" li esime dallo sforzo di determinare la concatenazione di operazioni che porta al risultato.

→ Gli alunni dovranno poter "misurare" sul campo, attraverso il cimento con svariati esempi di situazioni problematiche, la "superiorità" della strategia che punta sull'individuazione di relazioni (la "messa in equazione").

Ben venga la fatica di dover lavorare pazientemente, senza precoci scorciatoie, sui singoli passaggi risolutivi dell'equazione.

→ Un preliminare e ripetuto esercizio di pazienza consentirà loro di apprezzare le "tecniche risolutive" delle equazioni (che discendono tutte, in definitiva, dal **principio di equivalenza**), quelle tecniche che condurranno "in automatico" alla soluzione delle stesse.

La risoluzione di semplici equazioni – quelle che formalizzano i problemi che possiamo ragionevolmente proporre agli allievi – **non** richiede:

- la conoscenza dei prodotti notevoli (che acquistano "senso" solo nella scomposizione in fattori);
- e neanche la conoscenza del prodotto tra polinomi;
- e neppure del prodotto tra monomi e polinomi.

Ciò che davvero serve, in termini di calcolo letterale, è aver "digerito":

- che 2x + 3x è uguale a 5x e che 5x - 3x è uguale a 2x
- e che 7 • (2x + 3) = 14x + 21 (cioè che il prodotto tra un numero e un polinomio non è altro che l'applicazione della consueta proprietà distributiva in un contesto più "ricco").

- Per "gestire" e "controllare" quanto sopra non è necessario aver "dettato" le regole del calcolo letterale; è sufficiente aver incontrato più volte situazioni che richiedono passaggi di questo tipo e averci ragionato.

- La codifica delle regole (semmai) seguirà…

2.10. Conforto ministeriale

D’altra parte:

nel blocco *“Relazioni e funzioni”* delle **Indicazioni ministeriali -** Obiettivi di apprendimento al termine della terza si dice:

“- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.

…

- Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado”

Non si parla (è un caso?) di monomi, polinomi, tantomeno di prodotti notevoli…

Qui si toccano questioni controverse e suscettibilità diffuse, problemi di deontologia professionale, di rapporti con le famiglie e con il mondo della scuola superiore…

… ci torneremo tra un momento, a proposito delle sorprendenti (?) risultanze di un test di ingresso

3.1. Nasce l'algebra moderna

Intorno alla metà dell'Ottocento nasce l'algebra moderna che potremmo definire con qualche approssimazione:

lo studio generale delle proprietà "trasversali" delle "leggi di composizione" (in sostanza le operazioni) e delle "strutture d'ordine" definite su insiemi (anche non numerici)

- Già nel 1847 George Boole, fondatore del "calcolo logico", afferma che l'algebra si occupa "delle operazioni in sé considerate, indipendentemente dalle materie diverse alle quali possono essere applicate".
- A cavallo tra '800 e '900, Cantor, Dedekind, Hilbert e infine (a partire dal 1939) l'ambiziosa opera di sistemazione "Eléments de mathématique" di Nicolas Bourbaki (pseudonimo collettivo), in qualche modo assimilabile agli Elementi di Euclide, sviluppano il programma di rifondazione dell'algebra.
- "Al gruppo Bourbaki si deve il concetto generale e preciso di struttura matematica, l'individuazione delle strutture-madri, e con ciò tutta una nuova 'architettura della matematica'"

Lucio Lombardo-Radice, *"Istituzioni di algebra astratta"*

Quindi nell'algebra moderna **l'attenzione è spostata sulle proprietà (commutativa, associativa, distributiva, elemento neutro, inverso) delle leggi di composizione e sulle relazioni d'ordine** che possono essere comuni a vari insiemi e che ne determinano la struttura.

3.2. L'algebra moderna ci riguarda?

In che modo l'algebra moderna ci riguarda come insegnanti?

→ L'algebra moderna non è uno sviluppo ulteriore dell'algebra classica. Ci troviamo davanti a una vera e propria rivoluzione, a un cambio di paradigma che ci consegna un nuovo punto di vista, profondo e unificante.

→ Questo nuovo punto di vista ci invita a concentrare l'attenzione sulla necessità (o almeno sull'opportunità) di promuovere, nei nostri alunni, un governo sicuro delle caratteristiche degli insiemi numerici (in particolare **N** e **Q**) "abitati" nella scuola media e delle operazioni su di essi definite.

3.3. Un racconto di vita vissuta

Primissimi giorni di scuola in due classi di primo liceo del più antico e prestigioso liceo scientifico romano, a due passi dal Colosseo.

Dunque si parla di

→ alunni motivati – hanno scelto lo scientifico –, provenienti da famiglie attente al percorso scolastico dei figli; ragazze e ragazzi in qualche modo culturalmente e socialmente privilegiati

Il professore, scettico sull'utilità dei rituali test di ingresso, predispone e somministra ai 56 alunni delle due classi (tra loro 16 usciti dalla secondaria di primo grado con valutazione ottimo) un **questionario** che indaghi su aspetti di solito poco o per nulla "esplorati".

Il questionario prevede domande sull'immagine che gli alunni hanno della matematica, domande su presunte definizioni da riconoscere o meno come tali, domande su quanto convincente appare loro una data argomentazione a sostegno di una determinata tesi (qui mi sia consentito di citare solo la significativa circostanza che ben 46 alunni su 56 - tra cui 13 dei 16 ottimo - dichiarano che la tesi "il prodotto di un numero positivo e di un numero negativo è un numero negativo" è provata in modo convincente dall'argomento "infatti più per meno fa meno", cioè dalla parafrasi, in forma di slogan, della tesi medesima), e varie altre domande "strane".

Il questionario prevede anche un grappolo di quesiti che ci interessano rispetto al discorso che stiamo sviluppando. Vediamo che cosa avviene a proposito di tali quesiti…

N è il simbolo che indica l'insieme dei numeri naturali (cioè 0, 1, 2, 3, 4, 5, ecc.). Q è il simbolo che indica l'insieme dei numeri razionali (cioè, oltre ai numeri interi, anche i decimali limitati o periodici).

	In N e in Q	Solo in N	Solo in Q	Né in N né in Q	Non risponde
Tra due numeri qualsiasi ce ne sono infiniti	**20 (6)**	1	17 (4)	**16 (6)**	2
Il prodotto di due elementi dell'insieme è ancora un elemento dell'insieme	33 (10)	**17 (5)**	2	2	2 (1)
È un insieme ordinato	7 (2)	**38 (10)**	1 (1)	5 (1)	5 (2)
Ogni elemento dell'insieme ha un immediato successivo	**42 (14)**	8 (1)	0	4 (1)	2
Nell'insieme esiste un numero più grande di tutti	**24 (8)**	1	4	26 (7)	1
L'insieme ha sottoinsiemi infiniti	15 (5)	1	**17 (6)**	**18 (4)**	5 (1)

N.B. tra parentesi sono le risposte del sottogruppo formato da alunne e alunni con valutazione ottimo in uscita dalla scuola media

3.4. A proposito di scrupoli deontologici…

Ci chiediamo:

è accettabile che il lavoro sui numeri, assolutamente centrale nella scuola di base e che fa riferimento (principalmente) agli insiemi N e Q, produca questi esiti?

Ovvero, detto in parole crude e esplicite:

→ ha senso richiedere, in ambito numerico, prestazioni che presuppongono abilità di calcolo a un certo livello di complessità (ad esempio, il calcolo letterale "codificato") se non riusciamo a ottenere che alunne e alunni abbiano **chiara consapevolezza delle caratteristiche fondanti degli ambienti numerici** (in particolare **N** e **Q**), al cui interno chiediamo loro di operare?

Non è allora necessario, alla luce di quanto sopra, **rivedere radicalmente la gerarchia degli obiettivi**, dando il giusto rilievo all'acquisizione di questi elementi di consapevolezza?

Non è opportuno, alla luce di quanto sopra e del fatto che il tempo scolastico a nostra disposizione non è illimitato, **ridimensionare contestualmente gli aspetti meramente calcolistici**?

Ricapitolando…

Ancor prima di "specializzare" il discorso sull'algebra, abbiamo ragionato su **tre nodi trasversali** all'insegnamento della matematica:

- il rapporto a volte conflittuale tra semantica e sintassi (spendendo qualche parola a favore della semantica e dei percorsi "sensati")
- le differenze tra approccio algoritmico-procedurale e approccio relazionale (sottolineando la necessità di essere consapevoli, noi e gli allievi, della specificità di ciascuno di essi)
- il ruolo dei problemi (evidenziando la "delicatezza" del lavoro su di essi)

Siamo poi entrati nelle **problematiche legate alla didattica dell'algebra**:

- riflettendo sull'uso delle lettere in contesti diversi e con significati diversi
- esaminando in particolare esercizi e attività in cui le lettere non rappresentano incognite
- mettendo in discussione la sequenza tradizionale nella didattica: calcolo letterale-equazioni-problemi
- ragionando sulla difficoltà della "messa in equazione", sottolineando come la formalizzazione dei problemi faccia riferimento a un cambio di strategia risolutiva
- insistendo sulla necessità di far precedere al calcolo "normato" il calcolo "ragionato"

Abbiamo infine fatto cenno al contributo del punto di vista dell'**algebra moderna** in vista di una didattica che fornisca elementi di consapevolezza (in particolare sulle peculiarità delle "case numeriche" via via "abitate").

Dunque percorsi di cui sia chiaro e esplicito **il senso** e calcoli in cui intervenga **il ragionamento**.

In quest'ottica cambiano le gerarchie degli obiettivi; e cambia anche, almeno in parte, il ruolo che l'insegnante assume:

da colei/colui che trasmette contenuti consacrati dalla tradizione didattica, secondo modalità consacrate dalla tradizione didattica, a colei/colui che si interroga frequentemente (o almeno: non di rado!), così come è costretto inesorabilmente a fare un esploratore paziente e riflessivo che conquista passo dopo passo territori impervi e poco conosciuti.